

AVELINO SANMARTIN QUIROGA
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos y Licenciado en
Ciencias Matemáticas.

PLACA ORTOTROPA RECTANGULAR



PUBLICADO EN LA
REVISTA DE OBRAS PUBLICAS
JUNIO 1967, PAGES. 499 A 507

Se estudia en este artículo un modo consistente de determinar la superficie de influencia o función de Green para una losa ortotropa rectangular, con dos bordes opuestos simplemente apoyados y en los otros dos con condiciones de bordes generales. La solución se presenta en forma matricial adecuada para el cálculo con ordenador.

1. Introducción.

En ciertos tipos de tableros de puente, el estudio del reparto transversal de la sobrecarga adquiere una fundamental importancia. Y dentro de los métodos de cálculo existentes, interesa destacar la aproximación desarrollada por Guyón-Massonnet-Rowe, que consiste fundamentalmente en sustituir la estructura real del tablero por una losa ortotropa equivalente.

La ecuación general de la losa ortotropa y homogénea es:

$$k_{11} w_{,1111} + 2 k_{12} w_{,1122} + k_{22} w_{,2222} = p(x_1, x_2),$$

o más compactamente utilizando el convenio de Einstein:

$$k_{ij} w_{,ijij} = p(x_1, x_2) \quad i, j = 1, 2 \quad (1) \quad k_{ij} = k_{ji}$$

Y los esfuerzos son:

$$\left. \begin{aligned} M_{11} &= -(k_{11} w_{,11} + k w_{,22}) \\ M_{22} &= -(k_{22} w_{,22} + k w_{,11}) \\ M_{12} &= -(k_{12} - k) w_{,12} = M_{21} \\ Q_1 &= -k_{11} w_{,111} - k_{12} w_{,122} \\ Q_2 &= -k_{22} w_{,222} - k_{12} w_{,112} \\ R_1 &= Q_1 + M_{12,2} = -k_{11} w_{,111} - (2k_{12} - k) w_{,122} \\ R_2 &= Q_2 + M_{21,1} = -k_{22} w_{,222} - (2k_{12} - k) w_{,112} \end{aligned} \right\} (1, a)$$

En donde $p(x_1, x_2)$ es la carga actuante por unidad de área en el punto (x_1, x_2) de la placa. La situación de ejes pueden verse en la figura 1.^a

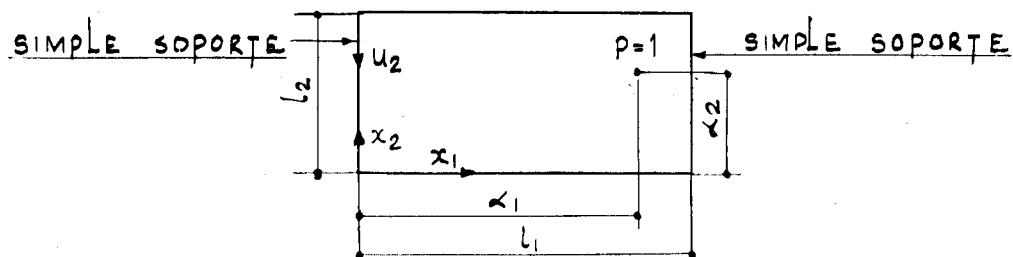


Figura 1.^a

$w = w(x_1, x_2)$ es la flecha.

M_{ij} , Q_i y R_i son los esfuerzos, con el convenio de signos indicados en la figura 2.^a ($i, j = 1, 2$).

$$w_{,i} = \frac{\partial w}{\partial x_i},$$

$p(x_1, x_2)$ y $w(x_1, x_2)$ positivos en la dirección de x_3 positiva.

La resolución de la ecuación (1) puede verse en (I) para el caso de simple apoyo en dos bordes opuestos. Sin embargo, la solución allí presentada, de un gran valor práctico, no es consistente en el sentido de que el coeficiente de Poisson es despreciado al plantear las condiciones de borde y en el interior de la placa es retenido. Más conveniente resulta la solución indicada (II), pero se restringe a las condiciones de simple apoyo o de borde libre a lo largo de $x_2 = 0$ y $x_2 = 1_2$.

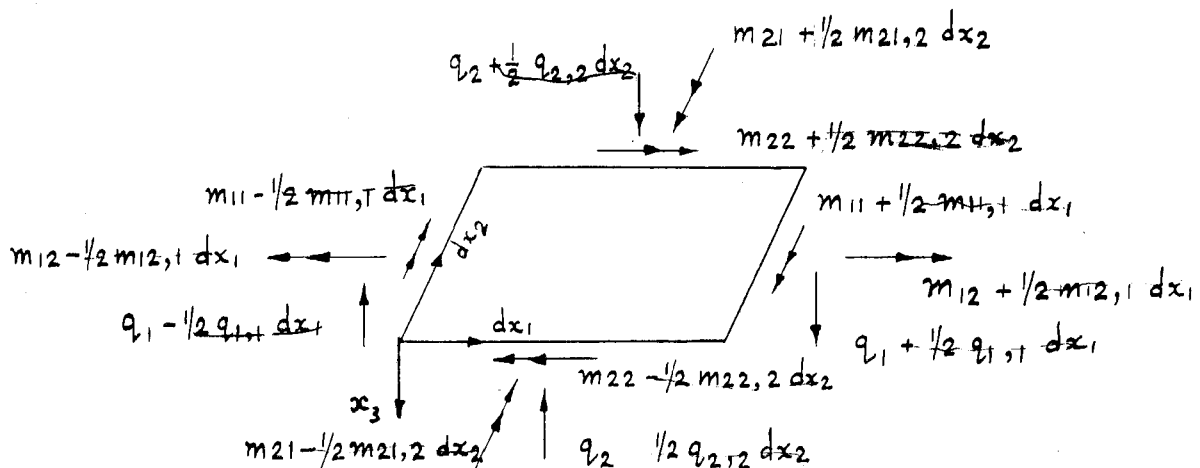


Figura 2.^a

En la solución que se obtiene aquí, se considera a lo largo de dichos bordes la condición de viga flexible, que incluye como casos particulares los estudiados en (II). El planteamiento matricial es análogo al realizado en (III) para la resolución de láminas cilíndricas.

2. Definición de los parámetros de la placa.

Para la losa representada en la figura 1.^a se considera una solución del tipo Levy, es decir:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(x_2) \sin \lambda_n x_1 \quad (2) \quad \text{con} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l_1},$$

Si $p(x_1, x_2) = \delta(x_1 - \alpha_1) \delta(x_2 - \alpha_2) = \delta(x_1 - \alpha_1) \delta(x_2 - \alpha_2)$, donde δ representa la delta de Dirac, entonces:

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \delta(x_2 - \alpha_2)}{l_1} \sin \lambda_n \alpha_1 \sin \lambda_n x_1$$

sustituyendo (2) en (1) y considerando el término n -simo se obtiene:

$$k_{11} \lambda_n^4 F^{(n)} - 2 k_{12} \lambda_n^2 F_{22}^{(n)} + k_{22} F_{22}^{(n)} = \frac{2 \delta (x_2 - \alpha_2)}{l_1} \operatorname{sen} \lambda_n \alpha_1. \quad (3)$$

La ecuación característica de (3) es:

$$k_{11} \lambda_n^4 - 2 k_{12} \lambda_n^2 p_n^2 + k_{22} p_n^4 = 0;$$

$$p_n = \pm \lambda_n \sqrt{\frac{k_{12} \pm \sqrt{k_{12}^2 - k_{11} k_{22}}}{k_{22}}}$$

En el caso de puentes, normalmente $\frac{k_{12}^2}{k_{11} k_{22}} < 1$ y se puede poner entonces:

$$\cos \alpha = \frac{k_{12}}{\sqrt{k_{11} k_{22}}} \quad \gg \quad \theta = \sqrt[4]{\frac{k_{11}}{k_{22}}}$$

α y θ son los parámetros que definen la ortotropía de la placa, con lo que la expresión de las raíces de la ecuación característica toma la forma:

$$p_n = \pm \lambda_n \theta \left(\cos \frac{\alpha}{2} \pm i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) = n (\pm r \pm is),$$

con:

$$r = \theta \lambda_1 \cos \frac{\alpha}{2} = \theta \frac{\pi}{l_1} \cos \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$s = \theta \lambda_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \theta \frac{\pi}{l_1} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

3. Solución complementaria de la ecuación (3).

Es la solución de la ecuación (3) con el segundo miembro igual a cero. Se utiliza un super-índice para indicar el orden del armónico n -simo.

La solución complementaria $F_c^{(n)}(x_2)$ tiene la forma:

$$F_c^{(n)}(x_2) = e^{-n r x_2} (a_1^{(n)} \cos n s x_2 + a_2^{(n)} \operatorname{sen} n s x_2) + e^{n r x_2} (a_3^{(n)} \cos n s x_2 + a_4^{(n)} \operatorname{sen} n s x_2), \quad (4)$$

en donde $a^{(n)}_1$, $a^{(n)}_2$, $a^{(n)}_3$ y $a^{(n)}_4$ son cuatro constantes arbitrarias.

Si se hace el cambio $u_2 = l_2 - x_2$ en el segundo término del segundo miembro de (4) y se reordenan las constantes conservando su anterior notación, se llega:

$$F_c^{(n)}(x_2) = \frac{a_1^{(n)}}{r} p_1^{(n)}(x_2) + \frac{a_2^{(n)}}{s} p_2^{(n)}(x_2) + \frac{a_3^{(n)}}{r} p_1^{(n)}(u_2) + \frac{a_4^{(n)}}{s} p_2^{(n)}(u_2), \quad (5)$$

con

$$p_1^{(n)}(x_2) = \frac{l_1}{2 \pi^2 \sqrt{k_{11} k_{22}}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \lambda_n \alpha_1}{n^3} e^{-n r x_2} \cos n s x_2;$$

$$p_2^{(n)}(x_2) = \frac{l_1}{2 \pi^2 \sqrt{k_{11} k_{22}}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \lambda_n \alpha_1}{n^3} \cdot e^{-n r x_2} \operatorname{sen} n s x_2.$$

Se pueden obtener las sucesivas derivadas de $F_c^{(n)}(x_2)$ por medio de una fórmula de recurrencia; en efecto si

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial x_2^k} \{F_c^{(n)}(x_2, u_2)\} &= A_k^{(n)} \left[\frac{a_1^{(n)}}{r} p_1^{(n)}(x_2) + \frac{a_2^{(n)}}{s} p_2^{(n)}(x_2) \right] + \\ &+ B_k^{(n)} \left[\frac{a_2^{(n)}}{s} p_1^{(n)}(x_2) - \frac{a_1^{(n)}}{r} p_2^{(n)}(x_2) \right] = \\ &= A_k^{(n)} \Phi_1^{(n)}(x_2) + B_k^{(n)} \Phi_2^{(n)}(x_2), \end{aligned}$$

entonces puede comprobarse que:

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_2^{k+1}} \{F_c^{(n)}(x_2, u_2)\} = A_{k+1}^{(n)} \Phi_1^{(n)}(x_2) + B_{k+1}^{(n)} \Phi_2^{(n)}(x_2),$$

con

$$\begin{aligned} A_{k+1}^{(n)} &= -n [r A_k^{(n)} + s B_k^{(n)}]; \\ B_{k+1}^{(n)} &= n [s A_k^{(n)} - r B_k^{(n)}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Con las fórmulas de recurrencia (6) se puede deducir la derivada de cualquier orden de $F_c^{(n)}(x_2)$, teniendo en cuenta la igualdad siguiente:

$$\frac{d^k F_c^{(n)}}{d x_2} = \frac{\partial^k F_c^{(n)}}{\partial x_2^k} + (-1)^k \frac{\partial^k F_c^{(n)}}{\partial u_2^k}. \quad (7)$$

4. Solución particular de la ecuación (3).

Se considera como solución particular $F_0^{(n)}(x_2)$ la correspondiente a una placa infinita en la dirección x_2 .

Las condiciones de borde en este caso son:

- 1.º $F_0^{(n)}(x_2) = 0$ cuando $|x_2| \rightarrow \infty$
- 2.º $F_{0,2}^{(n)}(x_2) = 0$ para $x_2 = \alpha_2$
- 3.º $F_{0,22}^{(n)}(x_2) = \pm \frac{\sin \lambda_n \alpha_1}{l_1 k_{22}}$ para $x_2 = \alpha_2 \pm \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow +0$).

Sea:

$$F_0^{(n)}(x_2) = \frac{a_1^{(n)}}{r} p_1^{(n)}(x'_2) + \frac{a_2^{(n)}}{s} p_2^{(n)}(x'_2) + \frac{a_3^{(n)}}{r} p_1^{(n)}(u'_2) + \frac{a_4^{(n)}}{s} p_2^{(n)}(u'_2),$$

con $x'_2 = x_2 - \alpha_2$ y $u'_2 = u_2 - l_2 + \alpha_2$.

Si se considera $x'_2 \geq 0$ la primera condición conduce a $a_3^{(n)} = a_4^{(n)} = 0$ y de las dos restantes se deduce: $a_1^{(n)} = a_2^{(n)} = 1$.

Análogamente cuando $x'_2 \leq 0$ se obtiene: $a_1^{(n)} = a_2^{(n)} = 0$; $a_3^{(n)} = a_4^{(n)} = 1$.

La solución particular es:

$$\begin{aligned} F_0^{(n)}(x_2) &= \frac{1}{r} p_1^{(n)}(u'_2) + \frac{1}{s} p_2^{(n)}(u'_2) & \text{para } x_2 \leq \alpha_2; \\ F_0^{(n)}(x_2) &= \frac{1}{r} p_1^{(n)}(x'_2) + \frac{1}{s} p_2^{(n)}(x'_2) & \text{para } x_2 \geq \alpha_2. \end{aligned}$$

5. Expresión de los desplazamientos y de los esfuerzos.

A partir de los resultados obtenidos anteriormente la solución general de la ecuación (1) es:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w^{(n)} \quad \text{con:} \quad w^{(n)} = w_0^{(n)} + w_c^{(n)} = F_0^{(n)}(x_2) \operatorname{sen} \lambda_n x_1 + F_c^{(n)}(x_2) \operatorname{sen} \lambda_n x_1.$$

Y cualquier esfuerzo genérico T puede obtenerse mediante las (1, a), alcanzándose el siguiente resultado general:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T^{(n)} \quad \text{con} \quad T^{(n)} = T_0^{(n)} + T_c^{(n)}$$

siendo:

$$T_c^{(n)} = g^{(n)} l_c p^{(n)}(x_2, u_2) e \cdot a^{(n)} \cdot \frac{\operatorname{sen} \lambda_n x_1}{\cos \lambda_n x_1},$$

$$T_0^{(n)} = g^{(n)} l_0 \cdot p^{(n)}(x'_2, u'_2) \cdot e \frac{\operatorname{sen} \lambda_n x_1}{\cos \lambda_n x_1}$$

En donde:

$g^{(n)}$ es un coeficiente, dim. (1×1) .

$l_c = (A, B, C, D)$ dim. (1×4) .

$l_0 = (A, B, O, O)$ dim. (1×4) si $x_2 \geq a_2$.

$l_0 = (O, O, C, D)$ dim. (1×4) si $x_2 \leq a_2$.

$$p^{(n)}(x_2, u_2) = \begin{pmatrix} p_1^{(n)}(x_2), & p_2^{(n)}(x_2), & O, & O \\ -p_2^{(n)}(x_2), & p_1^{(n)}(x_2), & O, & O \\ O, & O, & p_1^{(n)}(u_2), & p_2^{(n)}(u_2) \\ O, & O, & -p_2^{(n)}(u_2), & p_1^{(n)}(u_2) \end{pmatrix} \quad \text{dim. } (4 \times 4)$$

$e = \operatorname{diag.} \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{s}, \frac{1}{r}, \frac{1}{s} \right)$ matriz diagonal, dim. (4×4) ;

$e_0 =$ matriz columna $\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{s}, \frac{1}{r}, \frac{1}{s} \right)$ dim. (4×1) ,

$a^{(n)} =$ matriz columna $(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, a_4^{(n)})$ dim. (4×1) .

Las expresiones de A, B, C y D se dan en el siguiente cuadro, obtenido utilizando las fórmulas (1, a), (6) y (7), no dependiendo del orden n del armónico y sólo del tipo del esfuerzo T .

El coeficiente $g^{(n)}$ puede verse en el mismo cuadro.

En las fórmulas anteriores y en las que siguen se representan las cantidades matriciales con un trazo inferior.

B

C

$$\lambda_n = n \lambda_1$$

| FUNCION | $g^{(n)}$ | A | B | C | D | $\frac{\text{sen}}{\cos} \lambda_n x_1$ |
|----------------|-----------|--|--|----|----|---|
| $w^{(n)}$ | 1 | 1 | 0 | A | B | $\text{sen } \lambda_n x_1$ |
| $w_{11}^{(n)}$ | n | λ_1 | 0 | A | B | $\cos \lambda_n x_1$ |
| $w_{12}^{(n)}$ | n | -r | s | -A | -B | $\text{sen } \lambda_n x_1$ |
| $M_{11}^{(n)}$ | n^2 | $k_{11} \lambda_1^2 - k(r^2 - s^2)$ | $\overset{D_1}{2} k r s$ | A | B | $\text{sen } \lambda_n x_1$ |
| $M_{22}^{(n)}$ | n^2 | $\overset{D_2}{2} k \lambda_1^2 - k_{22}(r^2 - s^2)$ | $2 k_{22} r s$ | A | B | $\text{sen } \lambda_n x_1$ |
| $M_{12}^{(n)}$ | n^2 | $(k_{12} - k) r \lambda_1$ | $-(k_{12} - k) s \lambda_1$ | -A | -B | $\cos \lambda_n x_1$ |
| $Q_1^{(n)}$ | n^3 | $k_{11} \lambda_1^3 - k_{12}(r^2 - s^2) \lambda_1$ | $2 k_{12} r s \lambda_1$ | A | B | $\cos \lambda_n x_1$ |
| $Q_2^{(n)}$ | n^3 | $k_{22}(r^3 - 3 r s^2) - k_{12} r \lambda_1^2$ | $k_{22}(s^3 - 3 s r^2) + k_{12} s \lambda_1^2$ | -A | -B | $\text{sen } \lambda_n x_1$ |
| $R_1^{(n)}$ | n^3 | $k_{11} \lambda_1^3 - (2 k_{12} - k)(r^2 - s^2) \lambda_1$ | $(2 k_{12} - k) r s \lambda_1$ | A | B | $\cos \lambda_n x_1$ |
| $R_2^{(n)}$ | n^3 | $k_{22}(r^3 - 3 r s^2) - (2 k_{12} - k) r \lambda_1^2$ | $k_{22}(s^3 - 3 s r^2) + (2 k_{12} - k) s \lambda_1^2$ | -A | -B | $\text{sen } \lambda_n x_1$ |

6. Condiciones de borde.

Se considera la existencia de vigas flexibles a lo largo de los bordes $x_2 = 0$ y $x_2 = l_2$.

Es conveniente definir ahora unas nuevas cantidades matriciales en las distintas partes de la estructura.

Placa.

Se designa generador de desplazamientos a la matriz:

$$W^{(n)} = \begin{bmatrix} w^{(n)} \\ w_{12}^{(n)} \end{bmatrix} = h^{(n)} \cdot \{ m_c \cdot P^{(n)}(x_1, u_2) \cdot e \cdot a^{(n)} + m_0 \cdot P^{(n)}(x'_2, u'_2) \cdot e_0 \} \text{sen } \lambda_{(n)} x_1; \quad (8)$$

con:

$$h^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 \\ 0 & , & n \end{bmatrix} \quad m_c = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ -r & , & s & , & r & , & -s \end{bmatrix}$$

$$m_0 = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ -r & , & s & , & 0 & , & 0 \end{bmatrix} \text{ si } x_2 \geq \alpha_2$$

$$m_0 = \begin{bmatrix} 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & r & , & -s \end{bmatrix} \text{ si } x_2 \leq \alpha_2$$

Y análogamente se define el generador de esfuerzos:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} M_{22}^{(n)} \\ R_{22}^{(n)} \end{bmatrix} = k^{(n)} \cdot \{ n_c \cdot P^{(n)}(x_2, u_2) \cdot e \cdot \alpha^{(n)} + n_0 \cdot P^{(n)}(x_2, u_2) \cdot e_0 \} \text{ sen } \lambda_{(n)} x_1; \quad (9)$$

con:

$$k^{(n)} = \begin{bmatrix} n^2 & , & 0 \\ 0 & , & n^3 \end{bmatrix} \quad n_c = \begin{bmatrix} a_1 & , & b_1 & , & a_1 & , & b_1 \\ a_2 & , & b_2 & , & -a_2 & , & -b_2 \end{bmatrix};$$

$$n_0 = \begin{bmatrix} a_1 & , & b_1 & , & 0 & , & 0 \\ a_2 & , & b_2 & , & 0 & , & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } x_2 \geq \alpha_2,$$

$$n_0 = \begin{bmatrix} 0 & , & 0 & , & a_1 & , & b_1 \\ 0 & , & 0 & , & -a_2 & , & -b_2 \end{bmatrix} \quad \text{si } x_2 \leq \alpha_2$$

$$a_1 = k \lambda_1^2 - k_{22}(r^2 - s^2) \quad b_1 = 2 k_{22} r s,$$

$$a_2 = k_{22}(r^3 - 3 r s^2) - (2 k_{12} - k) r \lambda_{12}, \quad b_2 = k_{22}(s^3 - 3 s r^2) + (2 k_{12} - k) s \lambda_{12}.$$

Se designa por $W_d^{(n)}$, $x_d^{(n)}$, $W_f^{(n)}$ y $x_f^{(n)}$ los valores de $W^{(n)}$ y $x^{(n)}$ para $x_2 = 0$ y $x_2 = l_2$, respectivamente.

Borde $x_2 = 0$

La viga en este borde se define por las características mecánicas I_d, J_d y se supone que posee un eje vertical de simetría a la distancia $x_2 = -d_d$ (d_d es una cantidad positiva).

Los esfuerzos que actúan directamente sobre la viga son:

$$M_{vd} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{vd}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} m_{vd}^{(n)} \text{ sen } \lambda_n x_1$$

$$R_{vd} = \sum_{n=1}^{\infty} R_{vd}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} r_{vd}^{(n)} \text{ sen } \lambda_n x_1$$

(M_{vd} y R_{vd} son el momento torsor y la fuerza vertical, respectivamente)

Se definen, de manera análoga, el generador de desplazamientos $W_{vd}^{(n)}$ y el de esfuerzos $x_{vd}^{(n)}$ como:

$$W_{vd}^{(n)} = \begin{bmatrix} w_{vd}^{(n)} \\ w_{vd,2}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{vd}^{(n)} \\ \omega_{vd,2}^{(n)} \end{bmatrix} \text{ sen } \lambda_n x_1;$$

$$x_{vd}^{(n)} = \begin{bmatrix} M_{22vd}^{(n)} \\ R_{2vd}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22vd}^{(n)} \\ r_{2vd}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \text{sen } \lambda_n x_1.$$

Y existe entre ellos la siguiente relación constitutiva:

$$x_{vd}^{(n)} = F_d \cdot W_{vd}^{(n)} \quad (10) \quad \text{con} \quad F_d = \begin{bmatrix} 0 & , & -\lambda_n^2 G J_d \\ \lambda_n^4 E I_d & , & 0 \end{bmatrix}$$

siendo E el módulo de elasticidad y $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Condiciones de equilibrio:

$$x_{vd}^{(n)} = t_d \cdot x_d^{(n)} + p_{vd}^{(n)} \cdot \text{sen } \lambda_n x_1; \quad (11)$$

$$\text{con} \quad t_d = \begin{bmatrix} 1 & , & -d_d \\ 0 & , & 1 \end{bmatrix} \quad p_{vd}^{(n)} = \begin{bmatrix} m_{vd}^{(n)} \\ r_{vd}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Condiciones de compatibilidad:

$$W_{vd}^{(n)} = t_d \cdot W_d^{(n)}. \quad (12)$$

De las ecuaciones (8), (9), (10), (11), y (12) se obtiene:

$$\alpha_d^{(n)} \cdot \alpha^n + \beta_d^{(n)} = 0; \quad (13)$$

$$\text{con} \quad \alpha_d^{(n)} = \{F_d \cdot t_d \cdot h^{(n)} \cdot m_c + t_d \cdot k^{(n)} \cdot n_c\} p^{(n)}(0, l_2) \cdot e \quad \text{dim. } (2 \times 4);$$

$$\beta_d^{(n)} = -p_{vd}^{(n)} + \{F_d \cdot t_d \cdot h^{(n)} \cdot m_0 - t_d \cdot k^{(n)} \cdot n_0\} p^{(n)}(0, \alpha_2) \cdot e_0 \quad \text{dim. } (2 \times 1).$$

Borde $x_2 = l_2$.

Análogamente se definen l_f , J_f y $x_2 = d_f + l_2$ " ($d_f > 0$):

$$M_{vf} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{vf}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} m_{vf}^{(n)} \text{sen } \lambda_n x_1;$$

$$R_{vf} = \sum_{n=1}^{\infty} R_{vf}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} r_{vf}^{(n)} \text{sen } \lambda_n x_1.$$

Las siguientes igualdades se cumplen:

$$x_{vf}^{(n)} = F_f \cdot W_{vf}^{(n)} \quad (14) \quad \text{con} \quad F_f = \begin{bmatrix} 0 & , & -\lambda_n^2 G J_f \\ \lambda_n^4 E I_f & , & 0 \end{bmatrix}.$$

$$x_{vf}^{(n)} = -t_f \cdot x_f^{(n)} + p_{vf}^{(n)} \text{sen } \lambda_n x_1 \quad (15) \quad \text{con} \quad t_f = \begin{bmatrix} 1 & , & d_f \\ 0 & , & 1 \end{bmatrix},$$

$$p_{vf}^{(n)} = \begin{bmatrix} m_{vf}^{(n)} \\ r_{vf}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

$$W_{vf}^{(n)} = t_f \cdot W_f^{(n)} \quad (16)$$

De las ecuaciones (8), (9), (14), (15), y (16) se obtiene:

$$\alpha_f^{(n)} \cdot \alpha^n + \beta_f^{(n)} = 0, \quad (17)$$

en donde: $\alpha_f^{(n)} = \{F_f \cdot t_f \cdot h^{(n)} \cdot m_c + t_f \cdot k^{(n)} \cdot n_c\} p^{(n)}(l_2, 0) \cdot e \quad \text{dim. } (2 \times 4).$

$$\beta_f^{(n)} = -p_{vf}^{(n)} + \{F_f \cdot t_f \cdot h^{(n)} \cdot m_0 + t_f \cdot k^{(n)} \cdot n_0\} p^{(n)}(l_2 - \alpha_2, 0) \cdot e_0 \quad \text{dim. } (2 \times 1).$$

(13) y (17) constituyen el sistema de ecuaciones que sirven para determinar las cuatro constantes $a^{(n)}$, es decir:

$$a^{(n)} = \begin{bmatrix} \alpha_d^{(n)} \\ \alpha_f^{(n)} \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} \beta_d^{(n)} \\ \beta_f^{(n)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Una vez conocidos $a^{(n)}$ de (18) se sustituye su valor en las expresiones del párrafo 5 para obtener los desplazamientos y esfuerzos en cualquier punto de la placa, y en particular, de aquí mediante las ecuaciones (11), (12), (15) y (16) se deducen los desplazamientos y esfuerzos (*) a lo largo de las vigas del borde.

Para los casos: 1.º $I_d = I_f = J_d = J_f = 0$ y 2.º $\frac{1}{I_d} = \frac{1}{I_f} = J_d = J_f = 0$;

han sido presentados resultados en (II), con indicación de la rapidez de la convergencia al incrementar el número de armónicos n . Para el caso de una carga aislada se comprueba que los resultados obtenidos mediante la regla usual de incrementar un 10 por 100 el valor obtenido para el primer armónico, no siempre quedan del lado de la seguridad.

(*) En realidad, las fórmulas (11) y (15) dan la derivada respecto a x_1 de los esfuerzos actuantes en las vigas de borde.

BIBLIOGRAFIA

- I. Rowe, R. E.: *Concrete Bridge Design*. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- II. Morley, L. S. D.: "Bending of rectangular orthotropic plates under concentrated load with two opposite edges simply supported". *Schweizerische Bauzeitung*. No. 48, 1-12-66.
- III. Jenkins, R. S.: *Theory and design of cylindrical shells*. Ove Arup and Partners.